南京审计大学

2020 年硕士研究生招生考试初试（笔试）试题（ A 卷 ）

科目代码: 813
科目名称: 概率论与数理统计
满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、计算题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1, 0<y<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求: (1) X 与 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$，X 与 Y 独立吗?

(2) $P(X+Y<1)$;

(3) 条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$;

(4) $P(0<Y<0.5|X=0.5)$ 和 $E(Y|X=0.5)$.

2. 某箱装有 100 件产品，其中一，二，三等品分别为 80,10,10 件，现在从中随机抽取一件，记

$$X_i=\begin{cases} 1, & \text{抽到}i\text{等品} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} (i=1,2,3).$$

求: (1) (X_1,X_2) 的联合分布列和边际分布列;

(2) X_1,X_2 的相关系数 ρ，并问 X_1,X_2 是否独立? 为什么?

3. 已知随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，其分布函数为 $F(x)$.

求: (1) $Y=F(X)$ 的概率密度函数;

(2) Y 的特征函数 $\varphi_Y(t)$;

(3) $E\cos(\pi Y)$.

二、综合题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1. 设 $X \sim f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}} & x>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，求参数 θ 的极大似然估计量，并讨论其是否为 θ 的有效估计量.

2. (1) 简述 Lindeberg-Levy 中心极限定理;

(2) 某校共有 4900 个学生，已知每天晚上每个学生到阅览室去学习的概率为 0.1，试用中心极限定理，求阅览室需要准备多少个座位才能以 99% 的概率保证每个去阅览室的学生都有座位? ($\Phi_0(2.3263)=0.99$，其中，$\Phi_0(x)$ 是标准正态分布的分布函数)

3. 假设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0, \\ 0, \quad x<0 \end{cases}$ $X_1,\cdots,X_5$ 是来自总体 X 的样本,

求：(1)次序统计量 $X_{(1)}$ 和 $X_{(2)}$ 的密度函数 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$；

(2) $P(X_{(1)}>1)$；

(3) $DX_{(1)}$.

三、应用题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1. 某医院用光电比色计检验尿汞时，得尿汞含量 x 与消光系数 Y 的结果如下

尿汞含量 x	2	4	6	8	10
消光系数 Y	64	138	205	285	360

(1) 求 Y 对 x 的回归方程；

(2) 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验回归方程的显著性.（$F_{0.95}(1,3)=10.13$）

2. 某市统计局三名统计员分别登录 100 张农业经济调查表. 甲登录了 38 张，乙登录了 40 张，丙登录了 22 张，根据以往经验，甲出错的概率是 1%，乙出错的概率是 1.5%，丙出错的概率是 0.8%. 统计局长从三人登录的调查表中随机抽取了一张，

求：(1) 该表有错误的概率；

(2) 假如这张表出错了，问最可能是哪位统计员登录的？为什么？

3. 假设某厂生产的缆绳，其抗拉强度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现在从改进工艺后生产的一批缆绳中随机抽取 10 根，测量其抗拉强度，算得样本均值 $\overline{x}=0.053$，修正的样本方差 $S_n^{*2}=0.0032^2$. 假设 $\alpha=0.05$，

求： (1) 方差 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的区间估计；

(2) 在 α 显著性水平下，是否可以认为缆绳的平均抗拉强度为 0.05？

（$\chi^2_{0.025}(9)=2.7,\ \chi^2_{0.975}(9)=19.023,\ t_{0.975}(9)=2.2622,\ \sqrt{10}\approx 3.1623$）

四、证明题（共 2 小题，第 1 小题 7 分，第 2 小题 8 分，共 15 分）

1. 设 $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 为正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，S_0^2 为未修正的样本方差，

证明：

$$\frac{(n-1)(\overline{X}-\mu)^2}{S_0^2}\sim F(1,n-1).$$

2. 设 $X_1,X_2,\ldots$ 两两不相关且同分布于[0,1]上的均匀分布.

证明：$\{X_n,n\geq 1\}$ 服从大数定律.